

Dans cette séance, on va apprendre

- (i) la notion de SEL homogène et inhomogène;
- (ii) la notion de solution triviale d'un SEL homogène;
- (iii) le lien entre le SEL homogènes et les familles liées/libres;
- (iv) une caractérisation de $S_{(*)}$ en fonction du SEL homogène associé.
- (v) la notion d'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, image, préimage (ou image inverse)

3.3. SEL homogènes et inhomogènes

Déf 3.3 Un SEL (écrit sous forme vectorielle) $\underbrace{A}_{\substack{\text{matrice} \\ m \times n}} \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\bar{b}}_{\in \mathbb{R}^m}$ est dit $\begin{cases} \text{homogène} & \text{si } \bar{b} = \mathbf{0}; \\ \text{inhomogène} & \text{si } \bar{b} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$

Thm 3.4 Un SEL homogène $A \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$ admet au moins une solution!
 c'est la solution triviale $\bar{x} = \mathbf{0}$ ∇
 $\underbrace{A}_{m \times n} \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} \underbrace{= \mathbf{0}}_{\in \mathbb{R}^m}$

Exemple 3.7* (modifié)

Soit le SEL inhomogène $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Pour résoudre, il suffit d'appliquer des OEL:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + x_3 \\ x_2 = 4 - 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 + x_3 \\ 4 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol de } A\bar{x} = \bar{b}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\text{sol de } A\bar{x} = \mathbf{0}}$$

remarquer q 2 après le Thm 3.9

↑ pivots
↓ variables liées

Point clé

Pour $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$ le SEL homogène $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ liée $\Leftrightarrow \underbrace{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m}$ admet une solution non triviale.

(Preuve) $\Rightarrow$ Si $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ liée, alors $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tels que $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = 0$ $\xrightarrow[\text{aussi}]{\text{s'écrit}}$ $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ $\xrightarrow{\parallel} \bar{x}$

Comme au moins un x_i est non nul, $\bar{x} \neq 0$ (de $\mathbb{R}^n$), i.e. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \bar{x} = 0$ admet une solution non triviale.

$\Leftarrow$ La réciproque suit de renverser toutes les implications précédentes. $\square$

Application $\rightarrow$ [Thm 3.9] Soit $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \in \mathbb{R}^m$. Si $p > m$, alors $\mathcal{F}$ est liée.

(Preuve) Soit $A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p] \leftarrow$ matrice $m \times p$

Le SEL homogène $[\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p] \cdot \bar{x} = 0$ se traduit en la matrice

augmentée $[A|0] = \underbrace{[\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p]}_{\in \mathbb{R}^m} \underbrace{[0]}_{\in \mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,p}}_{\in \mathbb{R}^p} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{a_{m,1} \dots a_{m,p}}_{\in \mathbb{R}^p} & 0 \end{pmatrix}$. On calcule la FER

associée de $[A|0]$.

Comme $p > m$ de façon générale on l'écrit comme ça au moins une colonne ne contient pas de pivot $\nabla \nabla$

$\Rightarrow$ il y a au moins une variable libre $\xrightarrow{\text{ligne pointillée}} \Rightarrow$ le SEL $A \bar{x} = 0$ admet une infinité de solutions $\Rightarrow$ il y a au moins une solution non triviale

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ est liée. $\square$

Point clé

Revenir sur la fin de l'Exemple 3.7*

[Thm 3.10] Soit $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ un SEL inhomogène et soit $(*)_h A \cdot \bar{x} = 0$ le SEL homogène associé. Soit $\bar{v}_p \in \mathbb{R}^n$ une solution de $(*)$. Alors $S_{(*)} = \{ \bar{v}_p + \bar{v}_h : \bar{v}_h \in S_{(*)_h} \}$ $\uparrow$ i.e. $A \cdot \bar{v}_p = \bar{b}$

(Preuve) 2) Si: $\bar{v}_h \in S_{(x_h)}$, alors $A \cdot (\bar{v}_p + \bar{v}_h) = \underbrace{A \cdot \bar{v}_p}_{\bar{b}} + \underbrace{A \cdot \bar{v}_h}_{\bar{0}} = \bar{b}$ [12]
 i.e. $\bar{v}_p + \bar{v}_h \in S_{(*)}$.

3) Soit $\bar{v} \in S_{(*)}$, i.e. $A\bar{v} = \bar{b}$. Alors $\bar{v} = \bar{v}_p + (\bar{v} - \bar{v}_p)$
 et $A \cdot (\bar{v} - \bar{v}_p) = A\bar{v} - A\bar{v}_p = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$, i.e. $\bar{v} - \bar{v}_p \in S_{(x_h)}$. □

SLOGAN

Abs, si l'on connaît UNE solution de $(*)$ et toutes les solutions de (x_h) , on connaît TOUTES les solutions de $(*)$

Exemple 3.11
$$(*) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -9, \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

On voit par exemple que $\bar{v}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une solution de $(*)$, car

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \checkmark$$

On calcule maintenant les solutions de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_h)$

Par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

pivots $\Rightarrow$ variables libres: x_1, x_2

ce qui nous dit que

$$S_{(x_h)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

§ 3.4. Applications linéaires

Motivées par le Lemme 3.2 on introduit cette définition:

↓ synonyme de "fonction" (mais plus "fancy")

Déf 3.13 | Une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite linéaire si $T(\vec{v} + \lambda \vec{w}) = T(\vec{v}) + \lambda T(\vec{w})$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

⚠ Noter que l'on a écrit une unique condition au lieu de deux dans la définition précédente (cf. avec les notes de Sacha Friedli).

Les deux versions de la définition sont équivalentes. Exercice: Prouvez-le (voir "Quelques propriétés")

Exemple I | Par le Lemme 3.2, si A est une matrice de taille $m \times n$, alors l'application $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui associe $A \cdot \vec{x}$ à $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est linéaire.

Important! On va voir que
Tous les exemples d'applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
sont comme ceux de l'Exemple I.

Exemple F | L'application $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

est linéaire, car

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_2 + \lambda y_2) - 5(x_3 + \lambda y_3) \\ (x_1 + \lambda y_1) + (x_3 + \lambda y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 + \lambda(2y_2 - 5y_3) \\ (x_1 + x_3) + \lambda(y_1 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2y_2 - 5y_3 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Sinon:
 Aussi: $T = T_A$ avec ∇
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Non) Exemple 3.16 | L'application $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

n'est pas linéaire, car

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés

• Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire, alors $T(\underline{0}) = \underline{0}$
 $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^m$

(Preuve) Comme $T(\underline{0}) = T(\underline{0} + 1 \cdot \underline{0}) = T(\underline{0}) + 1 \cdot T(\underline{0}) = T(\underline{0}) + T(\underline{0})$,
 alors $T(\underline{0}) = \underline{0}$. linéaire ou non □

Rappel

Déf 3.12 Pour une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on définit l'image de

T via $\text{Img}(T) := \left\{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \bar{w} = T(\bar{v}) \right\}$

$$= \left\{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in \mathbb{R}^n \right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

On rappelle aussi que $\bar{w} = T(\bar{v})$ s'appelle image de $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ par T
 et $\bar{v}$ s'appelle image inverse de $\bar{w} \in \mathbb{R}^m$ par T .
 (ou préimage)

deux usages du mot image

Déf. A | On rappelle de façon plus générale, qe si:
 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application (linéaire ou non)
et $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^m$, on définit

• $T(S) := \{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in S \text{ t.q. } T(\bar{v}) = \bar{w} \} = \{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in S \}$

(alors $\text{Img}(T) = T(\mathbb{R}^n)$!)

que l'on appelle image (directe) de S par T;

• $T^{-1}(S') := \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{v}) \in S' \}$

que l'on appelle image inverse (ou préimage) de S' par T.

Dans ce langage : $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ équivaut à $T_A(\bar{x}) = \bar{b}$

$(*)$ est compatible ssi $\bar{b} \in \text{Img}(T_A)$

$$S_{(*)} = T_A^{-1}(\{\bar{b}\})$$

$$S_{(*)_n} = T_A^{-1}(\{\emptyset\})$$